https://www.oipa.education

Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme algébrique conventionnel : recherches et perspectives curriculaires

Hassane Squalli
Université de Sherbrooke

Conférence prononcée à distance aux membres de CORFEM

Zoom - 8 juin 2023

Plan

1. Préambule
2. Contexte d’émergence de la perspective Early Algebra
3. Carde de référence de l’algèbre et de la pensée algébrique
4. Enjeux importants dans l’«introduction de l’algèbre» au collège
5. Conclusion

1 - Préambule

Clarification des orientations épistémologiques

Double posture: chercheur en DDM et formateur d'enseignants

- « Les recherches prennent leur ancrage dans la formation et elles viennent l'alimenter. Il s'agit de comprendre les productions des élèves, d'élaborer des situations d'enseignement fécondes sur le plan des apprentissages, de développer des outils conceptuels, non pas pour élaborer une théorie sur les phénomènes d'enseignement, mais, au-delà des connaissances nouvelles produites dans ces recherches, pour mieux agir sur le plan de la formation. » (Bednarz, 2007, p. 49)

La formation est la mission, la recherche en est une stratégie

Bednarz, N. (2007). Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et de cohérence. Dans Marchand, P. (ed) *Actes du colloque GDM-2007, La didactique des mathématiques au Québec :Genèse et perspectives,* Université du Québec à Rimouski, 4-8 juin 2007.

Les mathématiques comme une activité humaine

- Les mathématiques peuvent être considérées comme
  - une science toute faite, c'est-à-dire un ensemble de connaissances déjà bien organisées (définitions, théorèmes, etc. organisées selon des domaines théoriques) ou encore comme
  - *une science qui se fait (depuis longtemps mais qui continue à se faire), c'est-à-dire comme une activité humaine.* Cette activité est caractérisée, entre autres, par une manière de penser, *une pensée mathématique*.

La pensée mathématique comme une manière d'agir et de réfléchir dans des activités mathématiques

- La pensée mathématique (PM) est une manière d'agir et de réfléchir dans des activités mathématiques.
- Distinguer entre pensée au sens anthropologique et pensée subjective celle du sujet pensant (Radford, 2011, 2015)
- Au sens anthropologique la pensée est une *praxis cogitan* (Wartofsky 1979), une manière d'agir et de réfléchir d'une certaine manière (prototype d'actions et de réflexions) résultant d'une synthèse culturellement codifiée du travail humain. (Radford, 2015)
- La pensée subjective, celle du sujet, est l'*actualisation* ou *concrétisation* de la pensée au sens anthropologique, d'une potentialité culturelle. (Radford, 2015)

Différentes formes de la pensée mathématique

- La PM ne se déploie pas dans le vide mais toujours en activités mathématiques.
- La PM prend différentes formes selon la nature de l’activité mathématique: nos parlerons de pensée algébrique, quand l’activité est algébrique.

2- Contexte d'émergence de la perspective Early Algebra

L’idée d’orienter l’apprentissage des mathématiques vers le développement de manières mathématiques de penser n’est pas nouvelle.

- Papert (1972): mathematical ways of thinking (MWOT)
- Le développement de la pensée mathématique sous ses diverses formes est depuis longtemps au cœur des programmes de mathématiques

Le développement précoce de la pensée algébrique n’est pas une idée nouvelle

- En Chine et en Russie, par exemple, des concepts algébriques sont introduits à l’école primaire depuis les années 1950 et 1960. (Cai et Howson, 2011).

Early Algebra (EA)

- EA est à la fois un domaine de recherche, une perspective curriculaire et un domaine de formation des enseignants. (Carraher, 2007)
- EA est basée sur l'idée d'orienter l'enseignement de l'algèbre vers le développement de la pensée algébrique (PA). Or la PA peut être développée avant l'avènement du langage littéral de l'algèbre au secondaire. Son développement peut donc commencer plus tôt, dès les premières années du primaire.
- EA a émergé à la fin des année 80 pour revoir en profondeur l'enseignement de l'algèbre.

L’enseignement de l’algèbre pose problème

- Jusqu’à la fin des années 1980, la plupart des recherches en didactique de l’algèbre étaient principalement centrées sur l’étude des difficultés d’apprentissage rencontrées par les élèves lors du passage de l’arithmétique à l’algèbre
- L’enseignement de l’algèbre pose problème.
- De nombreuses recherches ont été menées sur les ressemblances et les différences qui existent entre l’arithmétique et l’algèbre. Le passage pour les élèves d’un stade arithmétique à un stade algébrique est loin d’être facile à réaliser et pose problème.

Voir l’article synthèse de Kieran (1992)

Exemples de difficultés des élèves documentées par la recherche

- Les élèves voient le signe d'égalité comme un signe d'annonce de résultats (Booth, L., 1984; Kieran, 1981; Vergnaud, 1985; Vergnaud, Cortes, A., & Favre-Artigue, P., 1988);
- Ils ont tendance à rechercher une valeur numérique simple (Booth, 1984); (refus de laisser l'opération en suspens--> erreur de concaténation, comme 2 x + y = 2xy)
- Ils ne savent pas utiliser les lettres comme nombres généralisés ou comme variables (Booth, L., 1984; Kuchemann, 1981; Vergnaud, 1985);
- ils ont des difficultés à opérer sur les inconnues; et ils n'arrivent pas à comprendre les règles de transformation d'une équation en une équation équivalente (Bednarz, 2001; Bednarz & Janvier, 1996; Filoy & Rojano, 1989; Kieran, 1989; Steinberg, Sleeman, & Ktorza, 1990).
- Les longs apprentissages qu'ont réalisés les élèves en arithmétique peuvent même venir faire obstacle à leur apprentissage de l'algèbre (Booth, 1984)
- …

Différentes interprétations des sources de ces difficultés

- Vergnaud (1987) évoque une double rupture épistémologique lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre
  - opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique à celles de la résolution algébrique
  - opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres), des modes de contrôle dans la transformation des écritures.
- Kieran (1992, 1994) avance qu'entre l'arithmétique et l'algèbre résident à la fois de fausses continuités et des discontinuités.
  - Les fausses continuités résident dans l'utilisation des mêmes symboles et signes pour représenter le signe d'égalité et les opérations, mais avec des interprétations différentes.
  - Les discontinuités sont reliées à la mise en œuvre de démarches de résolution distinctes, à l'utilisation de nouveaux objets, voire la mise en jeu de conceptions structurales et non plus procédurales des objets, à la représentation formelle des problèmes par des équations et à l'utilisation de procédures formelles nouvelles pour les résoudre.

Nouvelle perspectives internationales pour l’enseignement de l’algèbre

Au début des années 1990, l’ensemble de la communauté internationale s’accorde sur les points suivants:

- L’enseignement de l’algèbre pose problème
- Nécessité de la recherche d’une nouvelle vision de l’algèbre autre qu’une arithmétique généralisée
- Mettre l’accent sur le développement de la pensée algébrique.

Nouvelles tendances pour l’enseignement de l’algèbre:

Le développement de la pensée algébrique avant l’introduction de la notation algébrique conventionnelle

Quelques enjeux pour la recherche en DM

1. Est ce que les élèves du primaire peuvent développer une pensée algébrique?
2. Est-ce que les enseignants du primaire peuvent développer la pensée algébrique chez leurs élèves?
3. Qu’entend-on par algèbre? Qu’entend-on par pensée algébrique? Quelle est la relation entre l’arithmétique et l’algèbre ?
4. Comment définir la pensée (mathématique) ?
5. Comment la caractériser sur le plan opératoire?
6. Quelle différence entre pensée et raisonnement?
7. Quel est le lien entre différentes modes de la pensée mathématique (ex. la pensée algébrique et la pensée arithmétique)?
8. ....

3 - Carde de référence de l’algèbre et de la pensée algébrique

Algèbre VS Pensée algébrique
(Squalli, 2000, 2015)

- Une analyse du développement historique de l'algèbre a permis de définir l'algèbre comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des **opérations** (lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires)**,** pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois.
- Ces activités sont marquées par une manière de penser **(pensée algébrique).**
- **La pensée algébrique est une manière d'agir et de réfléchir dans des activités algébriques.**

Algèbre
Le concept central: **opération**
Nombre =: élément d'un système algébrique

Arithmétique
Le concept central est le **nombre** «nombrant»
Nombre: représentant une quantité, une position ou une grandeur

- Si l'arithmétique peut être vue comme **la science des nombres**, des quantités et des grandeurs (Carraher et Schleimann, 2007);
- l'algèbre (élémentaire) devrait alors être vue comme **la science des opérations** (répétées un nombre fini de fois) (Squalli et Jeannotte, à paraître)

Exemples

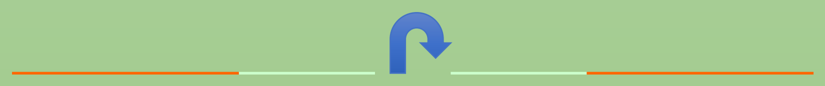
Pensée algébrique

- 134 + 567 = 567 + 134,

est-ce vraie? Pourquoi?

Oui, car dans l’addition de deux nombres, l’ordre n’est pas important (+ est commutative)

- Est-ce vraie pour n’importe quel couple de nombres? Pourquoi?
- Oui car si l’on représente deux nombres par deux longueurs, on a:



(validation intellectuelle : généralisation algébrique)

De type théorique

Pensée arithmétique

- 134 + 567 = 567 + 134

est-ce vraie? Pourquoi?

- Oui, car :

134 + 567 = 701 et 567 + 134 = 701

- Est-ce vraie pour n’importe quel couple de nombres? Pourquoi?
- Oui, car en faisant le calcul dans chaque cas, on obtient toujours le même résultat.

(validation empirique : généralisation arithmétique)

De type empirique

La pensée algébrique au plan opératoire

- La pensée algébrique est une totalité dynamique, elle se déploie en activité au moyen de :
  - un ensemble de raisonnements particuliers (dimension des raisonnements)
    - généraliser,
    - raisonner de manière analytique,
    - symboliser et opérer sur des symboles;
  - Exprimer, interpréter, raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles
    - Raisonner en termes de structures,
    - …
  - des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (dimension conceptuelle)
    - voir l'égalité comme une relation d'équivalence,
    - laisser les opérations en suspens;
    - voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul
    - …
  - des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations (dimension langagière)

Quelques conséquences de cette conceptualisation

- Le caractère algébrique de la pensée ou de l'activité mathématique *ne réside pas dans la nature des ostensifs*, au sens de Bosch et Chevallard (1999), soit dans la présence de signes alphanumériques. Il réside plutôt dans la signification des concepts en jeu ainsi que dans la nature des raisonnements impliqués.
- Comme pour d'autres auteurs (Radford, 2018 ; Mason et al. 1985 ; Lins, 1992) les signes alphanumériques ne sont pas essentiels ni caractéristiques de la pensée algébrique.
- La position théorique d'exiger l'utilisation des signes alphanumériques pour qu'une activité soit déclarée algébrique est intenable du point de vue du développement historique de l'algèbre élémentaire (Squalli, 2000, Squalli et al. 2020, Radford, 2018)

4 - Enjeux importants dans l’«introduction de l’algèbre» au collège

Analycité et Généralisation

La transition arithmétique algèbre a lieu en situation, l’élève est amené à passer d’un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique

- Le passage d’une pensée de type empirique à une pensée de type théorique
- L’entrée dans une nouvelle conceptualisation
- L’adoption de nouveaux modes de raisonnements et registres sémiotiques de représentation

Raisonnement de type arithmétique
vs
Raisonnement de type algébrique

Trouver les dimensions d’un terrain de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et dont la superficie vaut 128 m^2.

Trouver les dimensions d'un terrain de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et dont la superficie vaut 128 m^2.

Une **démarche arithmétique** possible :

On décompose 128 comme produit de deux entiers naturels de toutes les manières possibles:

$\mathbf{128 = 128 \times 1 = 64 \times 2 = 32 \times 4 = \underline{16 \times 8}}$

Le rectangle cherché a une largeur mesurant 8 mètres et une longueur mesurant 16 mètres.

Trouver les dimensions d'un terrain de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et dont la superficie vaut 128 m^2.

Une **démarche algébrique** possible:

- On suppose le problème résolu et on désigne par ***x*** la mesure de la largeur du rectangle (exprimée en mètres).
- D'après les conditions du problème, la mesure de la longueur vaut **2*x*** et on a *:* ***x*(2*x*) = 128** .
- On résout maintenant cette équation. On obtient :

$\boldsymbol{x(2x) = 128} \implies \boldsymbol{2x^2 = 128} \implies \boldsymbol{x^2 = 64} \implies (\boldsymbol{x = 8} \text{ ou } \boldsymbol{x = -8})$

- Les seules solutions possibles sont **8** et **–8**.
- On rejette la valeur négative et on conclut que le terrain rectangulaire cherché a une largeur qui mesure 8 mètres et une longueur qui mesure 16 mètres

Principale distinction entre un mode de raisonnement arithmétique et un mode de raisonnement algébrique

Raisonnement arithmétique

On opère toujours sur des données connues

Connu $\longrightarrow$ **Inconnu**

Raisonnement algébrique (de type hypothético-déductif)

On opère sur l’inconnue (comme si elle était connue)

Inconnu $\longrightarrow$ **Connu**

Important!

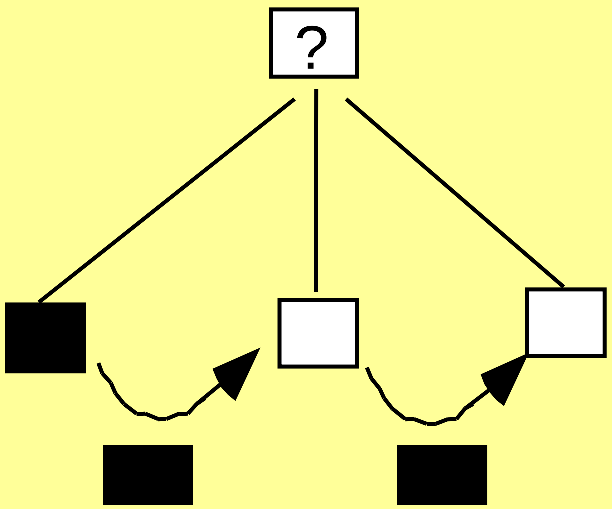
Ce n’est pas l’utilisation des lettres qui indique qu’il s’agit d’une procédure algébrique, mais le fait d’**opérer sur l’inconnue.**

Cadre d’analyse des raisonnements mobilisés dans la résolution de problèmes de comparaison (selon la densité de l’analycité et la nature du registre de représentation)

<table>
<tr><th></th><th>Non analytique</th><th>À tendance analytique</th><th>Analytique</th></tr>
<tr><td>Purement numérique</td><td rowspan="3">L’élève n’opère pas sur inconnue (ex. calcul direct, essais-erreurs avec ajustement simple)</td><td rowspan="3">- Raisonnements hypothéticodéductifs (ex. fausse position)

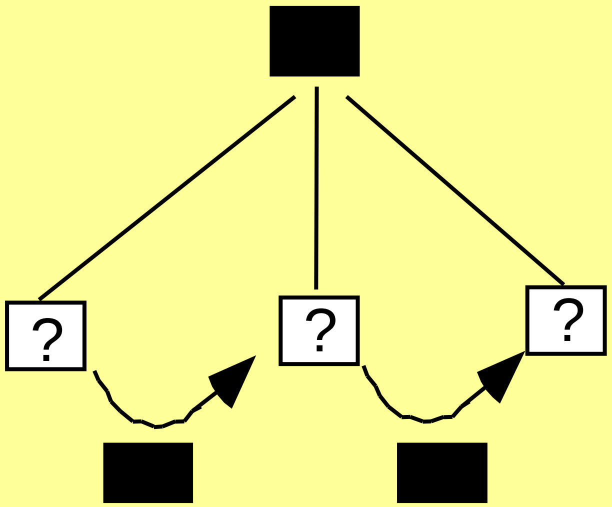
-L’élève considère l’inconnue, la représente explicitement, utilise cette représentation pour traduire les relations entre les inconnues et les connues, mais n’opère pas sur ces représentations pour trouver la valeur de l’inconnue</td><td rowspan="3">L’élève opère sur les données connues et inconnues du problème.
Il opère ensuite sur les relations et équations obtenues pour trouver les valeurs des inconnues.</td></tr>
<tr><td>Intermédiaire</td></tr>
<tr><td>Algébrique</td></tr>
</table>

Problèmes généralement présentés en arithmétique



"connecté"

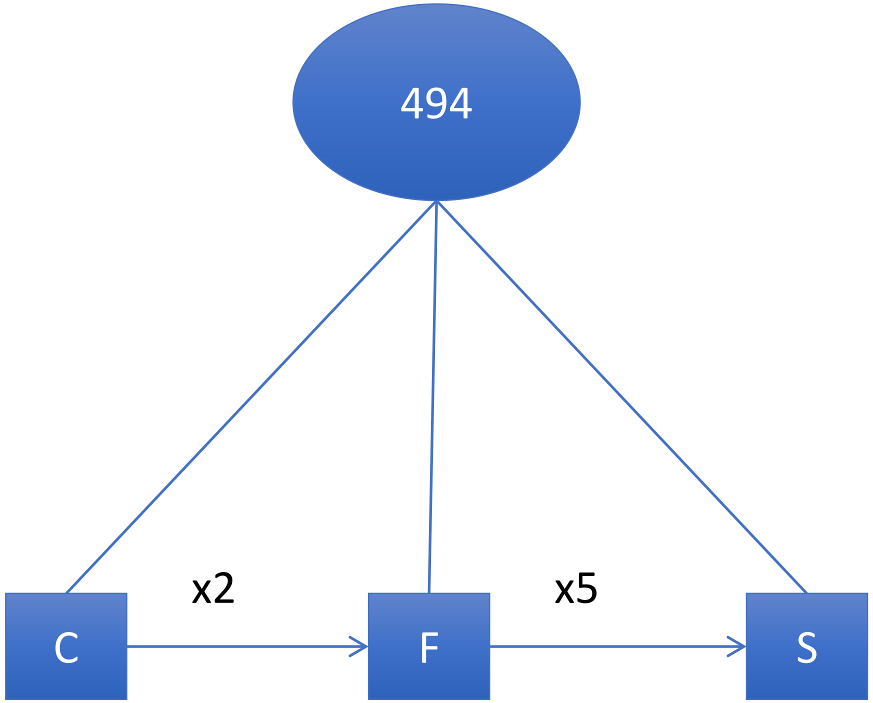
Problèmes généralement présentés en algèbre (utilisant le même type de relations)



"déconnecté"

Problème: Amis virtuels

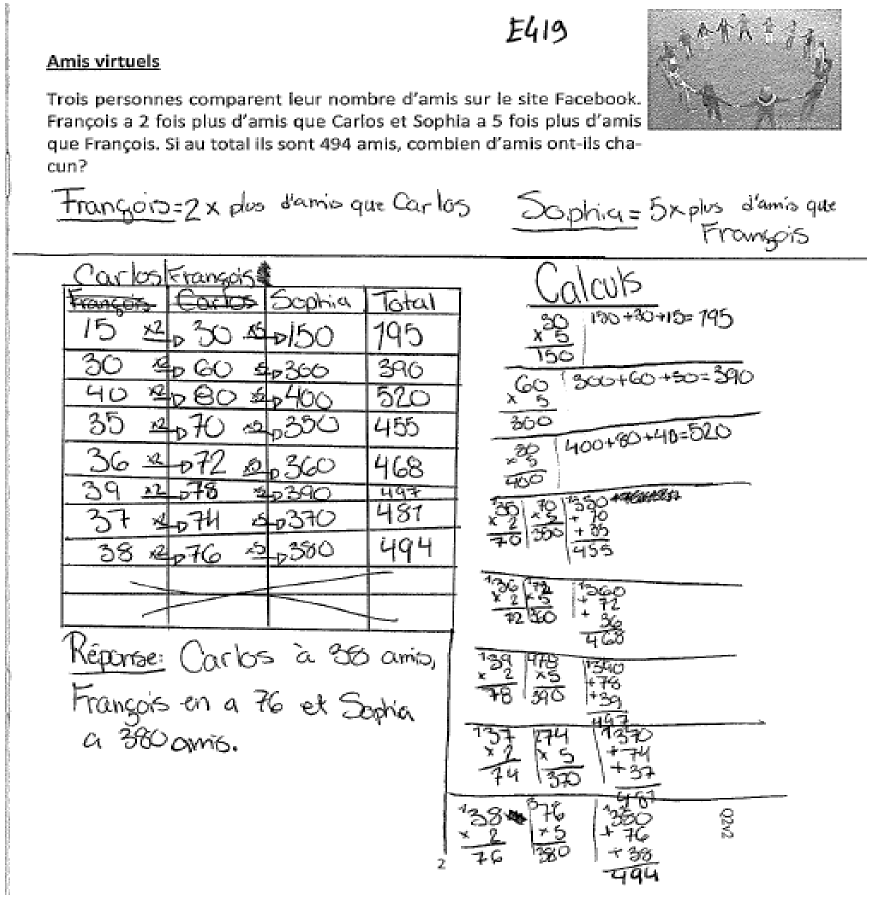
Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun?



- Problème à structure multiplicative
- Déconnecté
- De type composition de relations

Raisonnement non analytique,
de type essais-erreurs avec ajustement simple

- L'élève donne une valeur spécifique à une des inconnues et génère les valeurs des deux autres en gérant bien les relations.
- Il vérifie le total et ajuste en conséquence la valeur du nombre de départ dans ses essais en se basant sur l'écart obtenu entre le nombre total désiré et le nombre total obtenu sans prise en compte des relations entre les inconnues.
- Ce raisonnement n'est pas de type hypothéticodéductif.


E419

Amis virtuels

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun?

François = 2 x plus d'amis que Carlos Sophia = 5 x plus d'amis que François

Carlos ~~François~~	François ~~Carlos~~	Sophia	Total
15 $\xrightarrow{\times 2}$	30 $\xrightarrow{\times 5}$	150	195
30 $\xrightarrow{\times 2}$	60 $\xrightarrow{\times 5}$	300	390
40 $\xrightarrow{\times 2}$	80 $\xrightarrow{\times 5}$	400	520
35 $\xrightarrow{\times 2}$	70 $\xrightarrow{\times 5}$	350	455
36 $\xrightarrow{\times 2}$	72 $\xrightarrow{\times 5}$	360	468
39 $\xrightarrow{\times 2}$	78 $\xrightarrow{\times 5}$	390	497
37 $\xrightarrow{\times 2}$	74 $\xrightarrow{\times 5}$	370	481
38 $\xrightarrow{\times 2}$	76 $\xrightarrow{\times 5}$	380	494

Réponse: Carlos à 38 amis, François en a 76 et Sophia a 380 amis.

Calculs

30 × 5 = 150 | 150 + 30 + 15 = 195

60 × 5 = 300 | 300 + 60 + 30 = 390

80 × 5 = 400 | 400 + 80 + 40 = 520

35 × 2 = 70 | 70 × 5 = 350 | 350 + 70 + 35 = 455

36 × 2 = 72 | 72 × 5 = 360 | 360 + 72 + 36 = 468

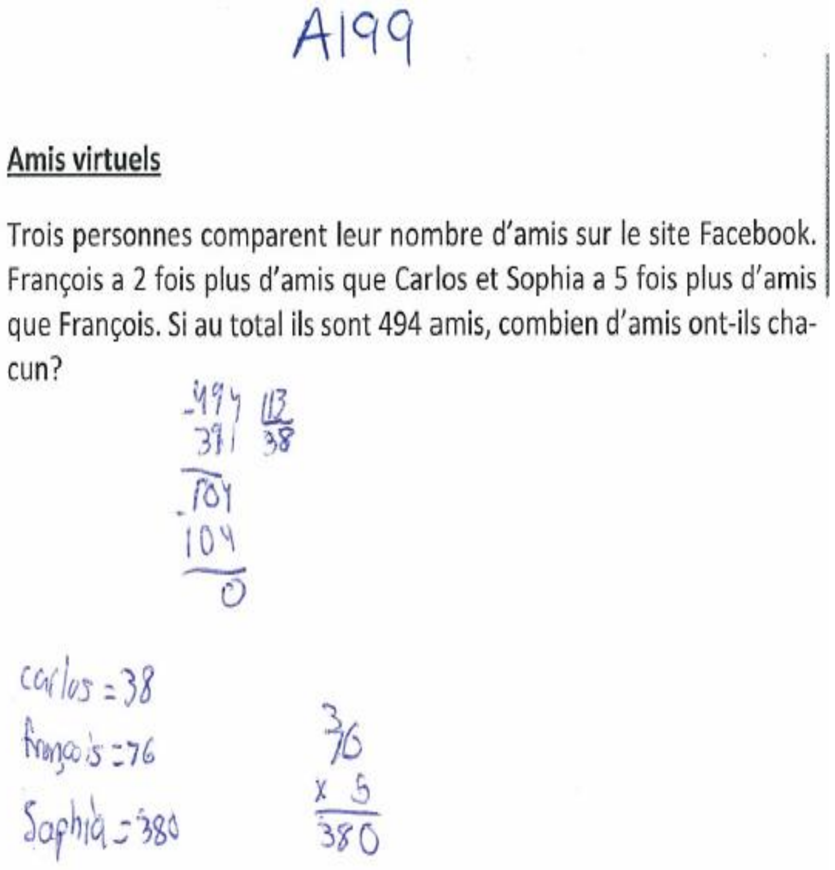
39 × 2 = 78 | 78 × 5 = 390 | 390 + 78 + 39 = 497

37 × 2 = 74 | 74 × 5 = 370 | 370 + 74 + 37 = 481

38 × 2 = 76 | 76 × 5 = 380 | 380 + 76 + 38 = 494

Raisonnement analytique, inconnues non représentées explicitement, registre numérique

- Le registre est purement numérique
- L'inconnue principale «nombre d'amis de Carlos» n'est pas représentée explicitement ni l'équation mathématisant le problème (elles restent muettes) bien qu'elles soient objets de la pensée de l'élève.
- Nous avons ici un exemple d'un raisonnement analytique



A199

Amis virtuels

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun?

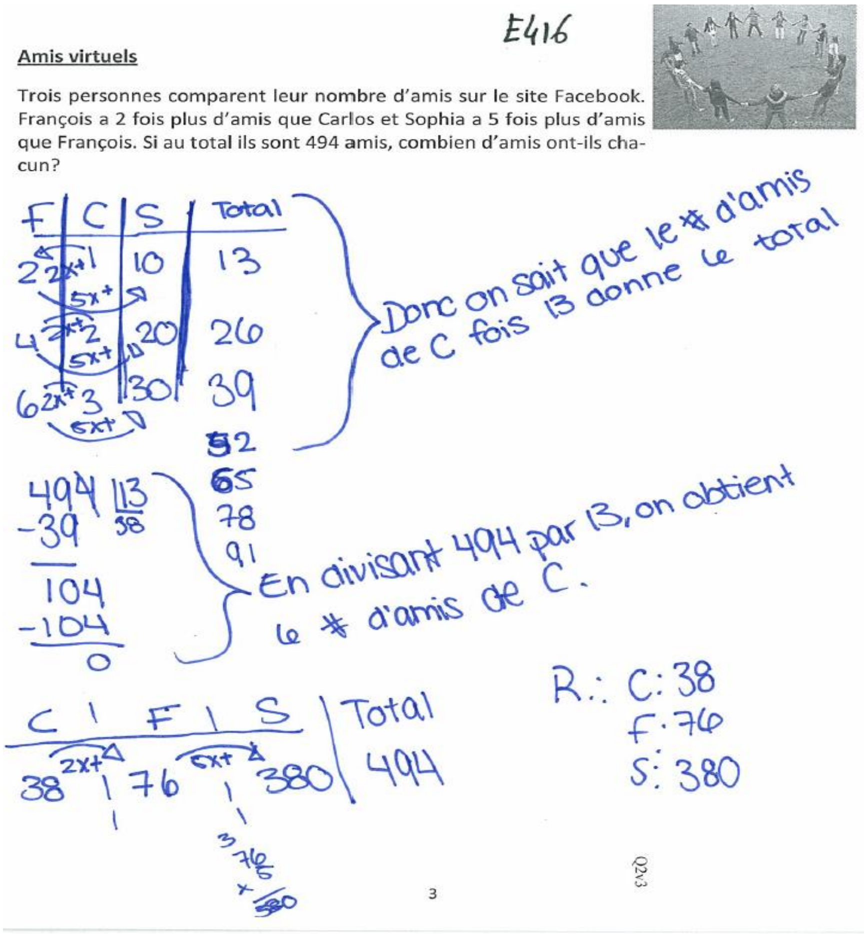
494 | 13
-39 | 38
104
-104
0

carlos = 38
françois = 76
Sophia = 380

76
x 5
380

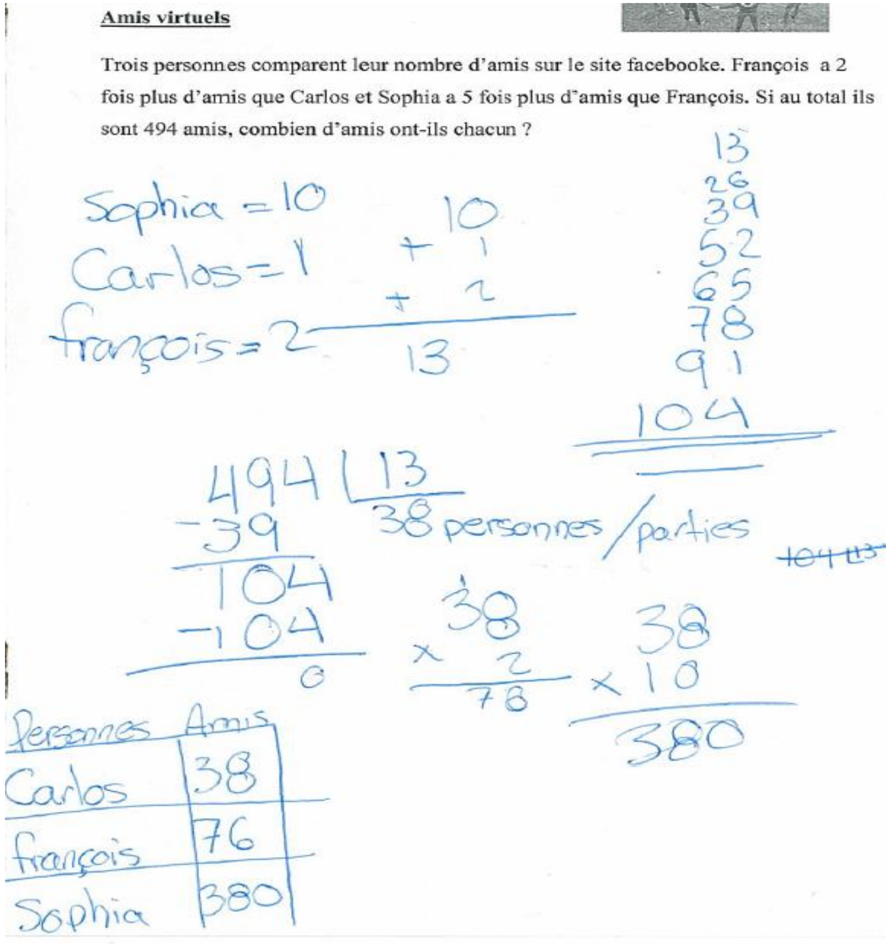
Raisonnement fonctionnel à tendance analytique.
Registre table de valeurs numériques et langage naturel.

- L'élève traite les inconnues momentanément comme des variables
- Il cherche à trouver la relation qui lie la variable *Nombre d'amis de Carlos* (variable indépendante) à celle du Total des amis des trois personnes (variable dépendante).
- En comparant les valeurs de la variable *nombre d'amis de Carlos* et la variable dépendante *Total des amis* il déduit la relation fonctionnelle: *Le nombre d'amis de Carlos fois 13 donne le total* (généralisation arithmétique)
- L'équation mathématisant le problème est exprimée en mots, comme une instanciation d'une relation fonctionnelle. Il opère sur cette équation pour trouver la valeur de l'inconnue principale.



Raisonnement analytique, inconnue intermédiaire, registre numérique

- L'élève semble saisir la structure multiplicative du problème et que les trois inconnues sont des multiples de l'inconnue *nombre d'amis de Carlos*.
- Il introduit une inconnue intermédiaire: le nombre d’amis de Carlos constitue une partie du total. Il peut maintenant opérer sur les nombres de parties, trouver la valeur d’une partie et ensuite toutes les autres.


Amis virtuels

Trois personnes comparent leur nombre d’amis sur le site facebooke. François a 2 fois plus d’amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d’amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d’amis ont-ils chacun ?

La généralisation algébrique : un processus mathématique peu développé chez les élèves à la fin de l'école secondaire

Exemple d'une étude

Importance de la généralisation en mathématiques

La généralisation est au cœur de l'activité mathématique
La plupart des faits mathématiques sont généraux

La généralisation est un processus essentiel dans la construction des connaissances mathématiques

D'une manière naturelle les élèves construisent des généralisations, souvent de façon inconsciente.

6 | 246; (6 | 186) → 6| divise tout nombre de trois chiffres dont le chiffre des unités est 6. **Faux**

Quand on somme deux nombres, l'ordre n'est pas important **Vrai**

Généraliser c’est tirer des conclusions valables pour tous les cas à partir de quelques exemples.

La généralisation commence dès qu’on pressent un cheminement sous-jacent, même si on est encore incapable de le formuler.

Trois moments clés dans le processus de généralisation

1. Voir la généralisation
2. Formuler la généralisation
3. Justifier la généralisation

John Mason

Généralisation algébrique VS Généralisation arithmétique

Généralisation algébrique: est de nature théorique, elle s'appuie sur une argumentation intellectuelle

Généralisation arithmétique est de nature empirique, elle s'appuie sur une argumentation empirique

- Exemple : Dans l'addition de deux nombres, l'ordre des facteurs n'est pas important (+ est commutative)

Vrai, car si l'on représente les deux nombres par des longueurs, on a:

Vrai car en faisant le calcul dans chaque cas, on obtient toujours le même résultat

La généralisation algébrique est peu développée chez les élèves à la fin de l'école secondaire (contexte du Québec)

- Difficulté à identifier une régularité
- Généralisation abusive
- Voir le général dans le particulier est source de malentendus en classe (prof. – élèves, ou élèves – élèves) . Difficulté à saisir le caractère générique d'un exemple spécifique
- Difficulté à justifier une généralisation par un argument intellectuel et non par une vérification empirique.

Hypothèse de recherche

Au terme de la scolarité à l' école secondaire, le processus de généralisation algébrique est faiblement développé chez les élèves.

Contexte de l'étude

- Échantillon: 76 étudiants en 3e année du BASS
- Population ayant une formation mathématique semblable à celle du grand public ayant suivi une formation mathématique au primaire et au secondaire.
- Étude ayant lieu au début d'un cours en didactique de l'algèbre avant tout enseignement

Le nombre $n^2 + n + 41$ est-il :

- **Toujours premier ?**
- **Quelque fois premier ?**
- **Jamais premier ?**

Justifiez votre réponse.

Le nombre $n^2 + n + 41$ est-il :
toujours premier; quelque fois premier; jamais premier?
Justifiez votre réponse.

Liste des 303 premiers nombres premiers

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379
383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997	1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187
1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373	1381	1399	1409	1423	1427
1429	1433	1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601	1607	1609	1613
1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867
1871	1873	1877	1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999												

Le nombre $n^2 + n + 41$ est premier pour :
n = 0, 1, 2, …, 38, 39, 42, 43, 45, 46, …

Le nombre $n^2 + n + 41$ n'est pas premier pour:
n = 40, 41, 44, et pour une infinité d'autres nombres, comme tous les multiples de 41

Questions

- **Comment les étudiants ils répondre à cette question?**
- **Quelle est la nature des exemples choisis ?**
- **Est-ce qu'il y a une logique dans les choix faits ou sont-ils faits au hasard?**
- **Au bout de combien d'essais numériques un étudiant est-il convaincu de sa généralisation?**
- **Quels sont les arguments apportés pour justifier la généralisation ?**

Réponses des étudiants

Toujours premier	Quelque fois premier	Jamais premier
57% **(43)**	**40%** **(31)**	**3%** **(2)**

Analyse des réponses

Généralisation arithmétique (AR)

Les généralisations sont formulées à partir de quelques essais numériques

Généralisation algébrique (AL)

Les généralisations sont formulées à partir d'une analyse de la structure syntaxique de l'expression $n^2 + n + 41$

AR	AL
75% (57)	25% (19)

Répartition des réponses selon les catégories

	Quelque fois	Toujours	Jamais	Total
AR	**47.4%** **(27)**	**50.9%** **(29)**	**1.7%** **(1)**	**100%** **(57)**
AL	**21.1%** **(4)**	**73.7%** **(14)**	**5.2%** **(1)**	**100%** **(19)**

Analyse des réponses de la catégorie Arithmétique: (N=57)

AR1

54.3% (31)

Tous les choix de *n* donnent des nombres premiers.

Tous ces étudiants, sauf un, ont répondu *Toujours premier.*

AR2

45.7% (26)

Un des choix de *n* donne un nombre non premier.

Tous ces étudiants ont répondu *Quelque fois premier.*

Choix des nombres dans la catégorie AR1 (N=31)
Généralisation par répétition

1) Selon l'ordre croissant de la suite des nombres (une série de nombres entre 1 et 40)
   - Ex.: n=2, 3 et 4, trouve à chaque fois un nombre premier, puis généralise cette régularité à tous les nombres.
2) Selon les propriétés particulières de certaines catégories de nombres
   - Ex.: variation des choix des nombres selon: pair/impair; petit/grand; premier/composé
3) Au hasard: sans aucune logique apparente

1) Extension du domaine de validité de la régularité observée sur quelques cas spécifiques

2) Extension du domaine de validité de la régularité dans deux classes de nombres disjointes et partitionnant l'ensemble des nombres

3) Un nombre choisi au hasard comme *représentant* de tous les nombres

Choix des nombres dans la catégorie AR2 (N=26)

Quelles sont les raisons qui poussent les étudiants à tester une valeur de n donnant un nombre non premier?

1) Erreurs de calcul (N=2);
2) Attribution de valeurs différentes à *n* dans les monômes *n* et n^2 (N=8)
3) 7 étudiants ont choisis le nombre 41 et ont calculé la valeur de l'expression $41^2 + 41 + 41$
4) 9 étudiants semblent avoir choisi leurs valeurs au hasard, sans raison apparente

Analyse des réponses de la catégorie AL (N=19)

	Quelque fois	Toujours	Jamais	Total
AL	**21.1%** **(4)**	**73.7%** **(14)**	**5.2%** **(1)**	**100%** **(19)**

Les réponses sont basés sur des raisonnements très variés portant sur une manipulation de l'expression $n^2 + n + 41$ ou sur sa structure syntaxique.

Trois types de raisonnement

1) Généralisation basée sur d'autres généralisations

Ex.: $n^2 + n + 41$ est toujours un nombre premier *car $n^2 + n$ est toujours un nombre pair et un nombre pair + un nombre premier est un nombre premier* (N=3)

Ex.: *car un nombre non premier + un nombre premier donne un nombre premier* (N=3)

Ex.: *car un nombre premier + n'importe quel autre nombre est un nombre premier* (N=2)

Ex.: $n^2 + n + 41$ est toujours un nombre premier *car c'est la somme d'un nombre pair ($n^2 + n$) est d'un nombre impair* (N=1).

2) Le nombre n est considéré comme inconnue et l'expression $n^2 + n + 41$ comme une équation à résoudre. (N=2)

Ex.:

$n^2 + n + 41$;

$n^2 + n = 41$

$n + n = (\sqrt{-41})/ 2$

ce nombre «ne sera jamais premier puisque n n'a pas la valeur d'un nombre premier

Ex.:

$n^2 + n + 41$;

$n^2 + n = 41$

$n + n = \sqrt{41^2}$

$2n = -6; n =-6/2; n = -3$

« alors le nombre $n^2 + n + 41$ est toujours premier puisque 3 est un nombre premier».

3) Raisonnement «correct» (N=1)

Ex.: «Le nombre total de $n^2 + n + 41$ n’est pas premier <u>seulement</u> lorsque ce nombre est divisible par 41»

Conclusion

Quelques remarques, enjeux et pistes de recherche

- Plusieurs enjeux dans le développement de la pensée algébrique: raisonnements-conceptualisation-symbolisation.
- INécessité de prendre en compte la dimension affective de la pensée algébrique (mathématique)
- Il faut penser en terme de «développement» → nécessité de recherches longitudinales (Elena Polostkaia et al.; 2023-2028)
- EA ouvre la perspective à des curriculums d'une nouvelle génération, organisés selon des trajectoires coordonnées de différents modes de la pensée mathématique de manière continue du primaire à la fin du secondaire

Un chantier important à peine ouvert par les travaux du domaine Early Algebra.

MERCI!

Des références et textes sont disponibles sur le site de l'OIPA.

https://www.oipa.education/

OBSERVATOIRE INTERNATIONAL DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE